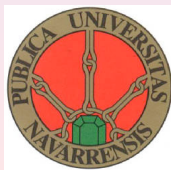


SOBRE JUEGOS Y MATEMÁTICAS

(Taller de talento matemático)

Prof. Dr. Esteban INDURÁIN ERASO
(Catedrático de Universidad. Área de Análisis Matemático.)

Depto. Matemáticas. Universidad Pública de Navarra. Pamplona, ESPAÑA.



UPNA 22 de noviembre de 2024

- 1 Introducción y motivación
- 2 Ejemplos ilustrativos
- 3 Analizando un juego (o un problema)
- 4 Eskerrik asko!

- 1 Introducción y motivación
- 2 Ejemplos ilustrativos
- 3 Analizando un juego (o un problema)
- 4 Eskerrik asko!

- 1 Introducción y motivación
- 2 Ejemplos ilustrativos
- 3 Analizando un juego (o un problema)
- 4 Eskerrik asko!

- 1 Introducción y motivación
- 2 Ejemplos ilustrativos
- 3 Analizando un juego (o un problema)
- 4 Eskerrik asko!

- 1 Introducción y motivación
- 2 Ejemplos ilustrativos
- 3 Analizando un juego (o un problema)
- 4 Eskerrik asko!

Introducción y motivación

Ejemplos ilustrativos

Analizando un juego (o un problema)

Eskerrik asko!

Einstein dixit

La fórmula del éxito:

$$<< A \text{ (Éxito)} = X \text{ (Trabajo)} + Y \text{ (Juego)} >>$$

Albert EINSTEIN (1879 - 1955)

Introducción y motivación

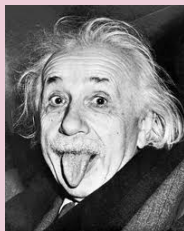
Ejemplos ilustrativos

Analizando un juego (o un problema)

Eskerrik asko!

Einstein dixit (y 2)

<<No te preocupes por tus problemas con las Matemáticas.
Los míos son aún mayores. >>



Albert EINSTEIN (1879 - 1955)

Introducción y motivación

Ejemplos ilustrativos

Analizando un juego (o un problema)

Eskerrik asko!

En Matemáticas son fundamentales las definiciones.

¡Tenedlo en cuenta SIEMPRE!

En Matemáticas son fundamentales las definiciones.

¡Tenedlo en cuenta SIEMPRE!

Vamos al D.R.A.E.L. (1)

Si buscamos en el Diccionario de la Real Academia Española de la Lengua (D.R.A.E.L.) el significado de la palabra **“juego”** nos encontraremos con varias páginas, con distintas acepciones posibles.

En Matemáticas son fundamentales las definiciones.

¡Tenedlo en cuenta SIEMPRE!

Vamos al D.R.A.E.L. (1)

Si buscamos en el Diccionario de la Real Academia Española de la Lengua (D.R.A.E.L.) el significado de la palabra **“juego”** nos encontraremos con varias páginas, con distintas acepciones posibles.

D.R.A.E. L. (2)

<http://buscon.rae.es/drael/>

En Matemáticas son fundamentales las definiciones.

¡Tenedlo en cuenta SIEMPRE!

Vamos al D.R.A.E.L. (1)

Si buscamos en el Diccionario de la Real Academia Española de la Lengua (D.R.A.E.L.) el significado de la palabra **“juego”** nos encontraremos con varias páginas, con distintas acepciones posibles.

D.R.A.E. L. (2)

<http://buscon.rae.es/drael/>

D.R.A.E.L. (y 3)

He querido destacar aquí las siguientes, que se reflejarán en el contenido y espíritu de la presente charla:

Introducción y motivación

Ejemplos ilustrativos

Analizando un juego (o un problema)

Eskerrik asko!

Definiciones de juego

- (a) Ejercicio recreativo sometido a reglas, y en el cual se gana o se pierde. Juego de naipes, de ajedrez, de billar, de pelota.
- (b) Determinado número de cosas relacionadas entre sí y que sirven al mismo fin. Juego de hebillas, de botones, de café.
- (c) Habilidad o astucia para conseguir algo.

Interacciones entre Juegos y Matemáticas

Interacciones entre Juegos y Matemáticas

Varias preguntas que podemos hacernos:

- (a) ¿Podemos aprender Matemáticas jugando?
- (b) ¿Podemos mejorar nuestra forma de jugar, a un determinado juego, haciendo uso de argumentaciones de tipo matemático?
- (c) ¿Quién aparece antes: La Matemática o el Juego?

Interacciones entre Juegos y Matemáticas (2)

Interacciones entre Juegos y Matemáticas (2)

Ideas:

1. Hay ejemplos abundantes de las dos situaciones anteriores: en unas, la Matemática aparece antes y se impone al juego. En otras, es el Juego el que está antes, y obliga a crear matemáticas, a investigar.
2. Los juegos más interesantes son precisamente esos, los que obligan a crear e investigar.

Interacciones entre Juegos y Matemáticas (y 3)

Interacciones entre Juegos y Matemáticas (y 3)

La investigación científica, entendida como un juego

<<En la investigación científica se camina derrota tras derrota hasta la victoria final.>>

- 1 Introducción y motivación
- 2 Ejemplos ilustrativos
- 3 Analizando un juego (o un problema)
- 4 Eskerrik asko!

La mesa circular

La mesa circular

Colocando monedas sobre una mesa circular

Dos jugadores van colocando monedas, por turnos, sobre una mesa circular. Las monedas son todas del mismo diseño, indistinguibles unas de otras. Al colocarlas, no se puede poner una encima de otra. Las monedas colocadas no se pueden retirar ni cambiar de posición, y quedan donde están hasta que termine el juego. El juego termina en el momento que haya un jugador que no disponga ya de espacio para colocar ninguna de sus monedas sin solaparse con las ya colocadas.

La mesa circular

Colocando monedas sobre una mesa circular

Dos jugadores van colocando monedas, por turnos, sobre una mesa circular. Las monedas son todas del mismo diseño, indistinguibles unas de otras. Al colocarlas, no se puede poner una encima de otra. Las monedas colocadas no se pueden retirar ni cambiar de posición, y quedan donde están hasta que termine el juego. El juego termina en el momento que haya un jugador que no disponga ya de espacio para colocar ninguna de sus monedas sin solaparse con las ya colocadas.

¿Quién gana el juego? ¿Cómo se gana?

La mesa circular

Colocando monedas sobre una mesa circular

Dos jugadores van colocando monedas, por turnos, sobre una mesa circular. Las monedas son todas del mismo diseño, indistinguibles unas de otras. Al colocarlas, no se puede poner una encima de otra. Las monedas colocadas no se pueden retirar ni cambiar de posición, y quedan donde están hasta que termine el juego. El juego termina en el momento que haya un jugador que no disponga ya de espacio para colocar ninguna de sus monedas sin solaparse con las ya colocadas.

¿Quién gana el juego? ¿Cómo se gana?

¿Cuál es la idea matemática clave aquí?

La mesa circular (y 2)

La mesa circular (y 2)

Simetría

Una mesa circular tiene **simetría central**.



El primer jugador coloca su moneda en el centro de la mesa, y después va jugando sistemáticamente por simetría, en las posiciones diametralmente opuestas a las que vaya empleando el segundo jugador. Así, el primer jugador gana.

Introducción y motivación

Ejemplos ilustrativos

Analizando un juego (o un problema)

Eskerrik asko!

Los pitagóricos

Los pitagóricos

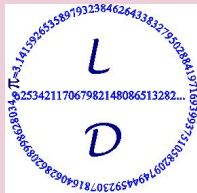
Pitágoras vivió en el siglo VI antes de Cristo

Profundos resultados de Geometría empezaron, por así decirlo, siendo **juegos o pasatiempos** de un grupo de amigos, allá por la más remota antigüedad.

Los pitagóricos

Pitágoras vivió en el siglo VI antes de Cristo

Profundos resultados de Geometría empezaron, por así decirlo, siendo **juegos o pasatiempos** de un grupo de amigos, allá por la más remota antigüedad.



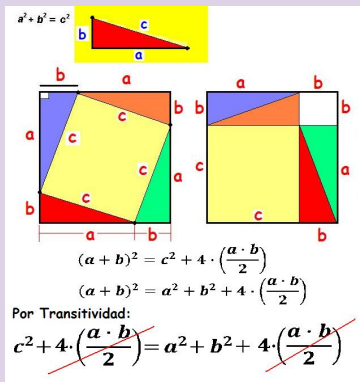
Sobre juegos y matemáticas

Los pitagóricos (2)

Los pitagóricos (2)

El teorema de Pitágoras

Ahí queda eso. (Por cierto, en ocasiones se limitaban a exponer las ideas solamente con dibujos, sin fórmulas ni cálculos. Y **no** usaban la *notación* de ahora).



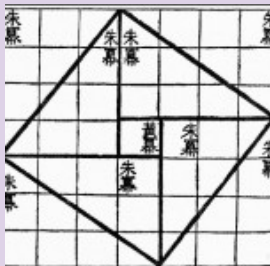
Los pitagóricos (3)

Los pitagóricos (3)

El teorema de Pitágoras

Dejo como ejercicio buscar otra demostración parecida (a veces se llama demostración china) que utilice **solamente una figura**, no dos.

Os doy una pista, pero como soy un tanto malvado, os la doy en chino:



Los pitagóricos (y 4)

Los pitagóricos (y 4)

Problemas pitagóricos

Hay algunos problemas clásicos que provienen de la época pitagórica, y que han pasado a la Historia de la Matemática:

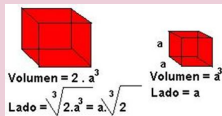
Los pitagóricos (y 4)

Problemas pitagóricos

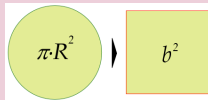
Hay algunos problemas clásicos que provienen de la época pitagórica, y que han pasado a la Historia de la Matemática:

Dos problemas pitagóricos

(a) La duplicación del cubo.



(b) La cuadratura del círculo.



¿Nos parecen fáciles?

¿Nos parecen fáciles?

¿Cuánto tiempo se necesitó para hallar la solución?

Marque Vd. con una (x) la respuesta correcta:

(NOTA: No marque nada, y proteste al conferenciante, si todas le parecen falsas):

- (a) ¿Unos días?
- (b) ¿Unos pocos años?
- (c) ¿Unos cien años más o menos?
- (d) ¿Cerca de mil años?

He aquí la respuesta:

He aquí la respuesta:

Tempus fugit. <<Vulnerant omnes, ultima ne cat>>.

¡Mucho más aún!

Se necesitaron cerca de 2.500 años.

He aquí la respuesta:

Tempus fugit. <<Vulnerant omnes, ultima ne cat>>.

¡Mucho más aún!

Se necesitaron cerca de 2.500 años.

Solución

Ambos problemas se resolvieron, **en sentido negativo**, a lo largo del siglo XIX.

Por ejemplo, F. Lindemann demostró la *trascendencia del número π* en 1.882, y eso resuelve el problema de la cuadratura del círculo, y lo resuelve por la negativa.

(Lindemann, F. : “Über die Zahl π ”, Mathematische Annalen 20 (1882): pp. 213–225).

Otra cuadratura del círculo

Otra cuadratura del círculo

Alfred Tarski y Miklós Laczkovich

Probablemente, el matemático polaco Alfred Tarski (1902-1983) conocía un resultado matemático llamado *Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien*, que afirma lo siguiente: <<**Dados dos polígonos cualesquiera de la misma área, es posible cortar uno de ellos en un número finito de piezas de forma que estas piezas puedan reordenarse formando exactamente el otro polígono** >>.



¡Nos podemos entretener mucho con una lámina de papel y unas tijeras!

¿Os suena algún juego basado en estas ideas?

¿Os suena algún juego basado en estas ideas?

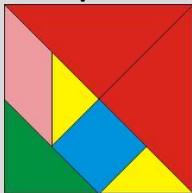
¡Claro que sí!

El juego del TANGRAM se basa precisamente en las ideas reflejadas en el teorema anterior.

¿O quizá sea justamente al revés?

Al resultado anterior podríamos llamarle “teorema del Tangram”. Y no sería de extrañar que sus autores lo hubieran descubierto mientras jugaban a este juego, e inspirados por el mismo.

¡Los juegos son fuente de inspiración!



Otra cuadratura del círculo (2)

Otra cuadratura del círculo (2)

Alfred Tarski y Miklós Laczkovich (Cont.)

Tarski se preguntó en 1925 si sería posible descomponer un cuadrado en un número finito de piezas que, recompuestas, formen un círculo de la misma área que el cuadrado inicial.

Equivalentemente, cabe preguntarse si puede hacerse algo similar, pero a la inversa, es decir: llegar a obtener un cuadrado partiendo de un círculo.

Otra cuadratura del círculo (3)

Otra cuadratura del círculo (3)

¿A que parece imposible?

Sorprendentemente, el matemático húngaro Miklós Laczkovich (n. 1948) probó en 1989 que la respuesta es **afirmativa**.



Laczkovich, M.: “Equidecomposability and discrepancy: a solution to Tarski’s circle squaring problem”, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 404 (1990), pp. 77–117.

Introducción y motivación

Ejemplos ilustrativos

Analizando un juego (o un problema)

Eskerrik asko!

Otra cuadratura del círculo (4)

Otra cuadratura del círculo (4)

Alfred Tarski y Miklós Laczkovich (Cont.)

A veces, en Matemáticas se prueban resultados teóricos del tipo **“haz tal cosa, siguiendo tales pautas, y al final obtendrás tal resultado”**. Como teorema, eso puede estar muy bien, y ser así válido y universalmente aceptado como un hecho matemático.

Otra cuadratura del círculo (4)

Alfred Tarski y Miklós Laczkovich (Cont.)

A veces, en Matemáticas se prueban resultados teóricos del tipo **“haz tal cosa, siguiendo tales pautas, y al final obtendrás tal resultado”**. Como teorema, eso puede estar muy bien, y ser así válido y universalmente aceptado como un hecho matemático.

Y, sin embargo, a veces las pautas que se han de seguir pueden estar totalmente fuera del alcance de nuestra limitación humana. Así, en el famoso teorema de Laczkovich ocurre que:

Otra cuadratura del círculo (5)

Otra cuadratura del círculo (5)

Alfred Tarski y Miklós Laczkovich (Cont.)

¡Oh, sorpresa! El número de piezas a emplear, aun siendo *finito*, es del orden de 10^{50} : aunque fuésemos capaces de fabricar una pieza por nanosegundo, la obtención de todas las piezas llevaría más tiempo que el que los físicos han estimado como “la edad del Universo desde el Big Bang”.

Otra cuadratura del círculo (5)

Alfred Tarski y Miklós Laczkovich (Cont.)

¡Oh, sorpresa! El número de piezas a emplear, aun siendo *finito*, es del orden de 10^{50} : aunque fuésemos capaces de fabricar una pieza por nanosegundo, la obtención de todas las piezas llevaría más tiempo que el que los físicos han estimado como “la edad del Universo desde el Big Bang”.

Por cierto, como los físicos han estimado también el número de partículas elementales que hay en el Universo, si los físicos tienen razón resulta que cada una de las piezas en las que habría que descomponer el cuadrado sería de un tamaño que rondaría lo **subatómico**.

Otra cuadratura del círculo (y 6)

Otra cuadratura del círculo (y 6)

Unas piezas bastante raras

Finalmente, las piezas (o las fronteras de las mismas) son “muy complicadas”. Por simplificar, diremos que no podríamos utilizar nunca unas tijeras para recortar una sola de tales piezas a partir de una hoja de papel.

Pero son piezas (subconjuntos de la figura dada) a fin de cuentas, perfectamente definidas además en ese teorema.

Otra cuadratura del círculo (y 6)

Unas piezas bastante raras

Finalmente, las piezas (o las fronteras de las mismas) son “muy complicadas”. Por simplificar, diremos que no podríamos utilizar nunca unas tijeras para recortar una sola de tales piezas a partir de una hoja de papel.

Pero son piezas (subconjuntos de la figura dada) a fin de cuentas, perfectamente definidas además en ese teorema.

Y, sin embargo, “es” posible.

Galileo diría aquí: **Eppur si muove!**

Ejemplos ... más sencillos

Ejemplos ... más sencillos

Laberintos

Te pierdes en un laberinto, te pones nervios@, y quieres, ante todo, salir de allí.

¡No importa si sales por la misma puerta que has entrado!
Solamente pretendes huir, salir, escaparte...

No importa cómo lo hagas, ni por qué puerta salgas.

¡Sal si puedes!



Salir del laberinto

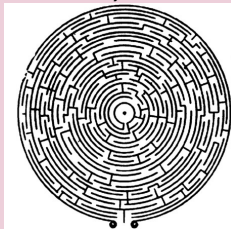
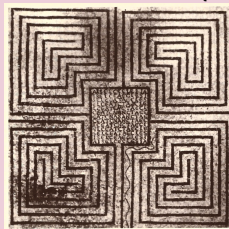
Salir del laberinto

Solución:

¡Usa la mano derecha!

¡O la izquierda, si eres zurdo!

¡Y usa la cabeza, también (para pensar)!



<<En cuanto se pisaba en el laberinto y hasta el fin, era preciso tocar los setos vivos con la mano derecha>>.

Ejemplos ... algunos más

Ejemplos ... algunos más

Cuatro colores bastan

<< Puede pintarse un mapa plano con solamente **CUATRO COLORES** de manera que dos regiones con línea de frontera común no reciban el mismo color.>> (K. Appel, W. Haken, 1976).

Ejemplos ... algunos más

Cuatro colores bastan

<< Puede pintarse un mapa plano con solamente **CUATRO COLORES** de manera que dos regiones con línea de frontera común no reciban el mismo color.>> (K. Appel, W. Haken, 1976).

Se considera el primer resultado en cuya demostración intervinieron los ordenadores de forma decisiva. Aún hoy, no exento de polémica.



¿Hay alguien de Madrid en esta sala?

- 1 Introducción y motivación
- 2 Ejemplos ilustrativos
- 3 Analizando un juego (o un problema)
- 4 Eskerrik asko!

Aunque parezcan similares, hay ejercicios, pasatiempos o juegos cuyo análisis utiliza ideas matemáticas completamente distintas.

Cuadros mágicos

Cuadros mágicos

Cuadrados mágicos

¿Corresponden estos cuadrados mágicos a las mismas ideas matemáticas?

2	7	6	→15	
9	5	1	→15	
4	3	8	→15	
↙15	↓15	↓15	↓15	↘15

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

¿Se resuelven de la misma manera?

Análisis

Análisis

¿Qué hacemos cuando analizamos sistemáticamente (matemáticamente) un juego, o un problema?

Análisis

¿Qué hacemos cuando analizamos sistemáticamente (matemáticamente) un juego, o un problema?

Respuesta:

¡Investigar!

Análisis

¿Qué hacemos cuando analizamos sistemáticamente (matemáticamente) un juego, o un problema?

Respuesta:

¡Investigar!

Investigando

¿Y qué pautas o procesos sigue todo investigador?

Las claves del análisis

Las claves del análisis

Pautas que seguimos al investigar

- (a) Hacemos **esquemas** que nos ayuden a entender el problema. (Ejemplo: En el caso de los laberintos, usamos grafos). También tratamos de usar una buena **notación**.
- (b) Tratamos de aproximarnos a un problema nuevo a través de otros parecidos. **Comparamos y buscamos isomorfismos o analogías**.
- (c) Tratamos de ver si hay **variantes** (no isomorfas).
- (d) Tratamos de descomponer el juego (o el problema) en otros más simples. **Simplificamos**.
- (e) Cuando resolvemos algo, tratamos de ver si eso nos sirve para más aún, para resolver otros problemas más sofisticados o más generales. **Extendemos y generalizamos**.

Un ejemplo práctico

Un ejemplo práctico

¿A que nos suena este objeto a todos? ¿Y este caballero?



Un ejemplo práctico

¿A que nos suena este objeto a todos? ¿Y este caballero?



¿Y estos otros objetos?



Un ejemplo práctico

¿A que nos suena este objeto a todos? ¿Y este caballero?



¿Y estos otros objetos?



¿Y estos otros dos más?



Otro ejemplo práctico

Otro ejemplo práctico

Las apariencias engañan

Aunque no nos lo creamos, el SUDOKU **no** debe considerarse un juego numérico.

8			4		6			7
						4		
	1					6	5	
5		9		3		7	8	
				7				
	4	8		2		1		3
	5	2					9	
		1						
3			9		2			5

Otro ejemplo práctico

Las apariencias engañan

Aunque no nos lo creamos, el SUDOKU **no** debe considerarse un juego numérico.

8			4		6			7
						4		
	1					6	5	
5		9		3		7	8	
				7				
	4	8		2		1		3
	5	2					9	
		1						
3			9		2			5

¿Por qué?

Otro ejemplo más ... y terminamos

Otro ejemplo más ... y terminamos

El problema de Steiner

En el plano, la línea más corta entre dos puntos es un **segmento rectilíneo**.

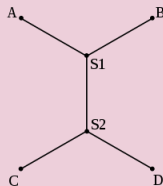
Otro ejemplo más ... y terminamos

El problema de Steiner

En el plano, la línea más corta entre dos puntos es un **segmento rectilíneo**.

¿Cuál es la conexión más corta para **TRES O MÁS** puntos **no alineados**?

El problema de Steiner consiste en encontrar el árbol mínimo que interconecta varios puntos de una red. Fue propuesto por el matemático alemán Jacob Steiner a principios del siglo XIX.



- 1 Introducción y motivación
- 2 Ejemplos ilustrativos
- 3 Analizando un juego (o un problema)
- 4 Eskerrik asko!

That's all folks!

That's all folks!

¡ESO FUE TODO, AMIGOS!

